b) $\int e^x \sin x dx$

Para resolverla tenemos que visualizar las 2 funciones existentes en la integral que se encuentran en términos de la misma variable, o sea x.

La primera función es e^x
La segunda función es $\sin x\, dx$

Y ambas funciones se encuentran multiplicándose. Hay que integrar todo en términos de la variable x.

Para empezar a resolver este problema tenemos que hacernos una pregunta ¿qué método utilizar para resolverla?

¿Se puede resolver por alguna fórmula inmediata o directa de la tabla de integrales? No, debido a que no hay una fórmula que contenga a x **elevada a una potencia y multiplicando a** $Cos\, x$

¿Por sustitución trigonométrica? En estos ejercicios normalmente hay un término en la integral a resolver que contiene una raíz cuadrada de un binomio de cuadrados.

Entonces se sugiere el método de integración por partes porque podemos separar 2 funciones de la misma integral de la siguiente forma:

Función a Integrar Fórmula de integración por partes

$$\boxed{\int u\, dv} = \boxed{u\, v - \int v\, du}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = e^x \\ dv = \sin x\, dx \end{array}} \begin{array}{l} \xRightarrow{\text{Derivar}} \quad du = e^x dx \\ \xRightarrow[\text{Integrar}]{} \quad v = -\cos x \end{array}$$

Nota que la parte que hay que derivar o sea la derivada de u con respecto a x es:

Derivar

$$\frac{du}{dx} = \frac{d(e^x)}{dx} = e^x \quad \Rightarrow \quad du = e^x dx$$

Y el término dv se integra de la siguiente manera:

Integrar

Integración de (sin x) con respecto a "x"

$$dv = \sin x \, dx$$

$$\int dv = \int \sin x \, dx$$

$$v = -\cos x$$

Integración de (1) con respecto a "v"

Con esta breve explicación sobre cómo se obtienen los términos necesarios que la fórmula de integración por partes **nos pide, resumimos lo ya obtenido:**

$$\begin{aligned} u &= e^x & &\Rightarrow & du &= e^x dx \\ dv &= \sin x \, dx & &\Rightarrow & v &= -\cos x \end{aligned}$$

Ahora solo hay que acomodar los términos anteriores en el mismo orden que la fórmula de integración por partes señala; reescribiremos la función original:

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x \, dx = uv - \int v \, du &= e^x(-\cos x) - \int(-\cos x)(e^x dx) \\ &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \qquad \cdots(1) \end{aligned}$$

Pero resulta que la nueva función contiene de nuevo una integral que resolver; ahora es $\int e^x \cos x \, dx$**; ya que no podemos dejar el resultado de la integral original en términos de otra integral tendremos que resolver ese nuevo término por algún método de integración, en nuestro caso es necesario aplicar otra vez integración por partes a:**

$$\int e^x \cos x \, dx$$

Y siguiendo el mismo proceso que el anterior para esta integral:

$$\begin{aligned} u &= e^x & &\Rightarrow & du &= e^x dx \\ dv &= \cos x \, dx & &\Rightarrow & v &= \sin x \end{aligned}$$

Tomando (1) y sustituyendo los términos que acabamos de obtener

$$\begin{aligned} -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx = -e^x \cos x + \left(uv - \int v \, du\right) &= -e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \left(\int e^x \sin x \, dx\right)\right) \\ &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \end{aligned}$$

Ahora escribimos la integral original y su nuevo resultado:

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

Podemos ver que el resultado contiene de nuevo una integral idéntica a la original que se tiene que resolver e inclusive por el método por partes; aquí es donde pensaríamos que estamos en un ciclo de nunca acabar, pero si vemos de nuevo la ecuación nos daremos cuenta que se puede hacer un despeje con el propósito de que el resultado ya no tenga términos para integrar:

Signo " = " indicando una ecuación de igualdad

Integral original

Integral idéntica a la original obtenida en la resolución

$$\boxed{\int e^x \sin x\, dx} = -e^x \cos x + e^x \sin x - \boxed{\int e^x \sin x\, dx}$$

Pasar este término de signo negativo al otro lado del " = " con término positivo

$$\int e^x \sin x\, dx + \int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

Sumamos estos 2 términos idénticos:

$$2\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

Y finalmente despejamos para dejar la ecuación con la integral propuesta a resolver del lado izquierdo del igual y su resultado en el lado derecho del igual:

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$$

Por tratarse de una integral indefinida (no tiene límites de integración) entonces sumemos +C al final del resultado.

c) $\int xe^{6x}dx$

Sean u y dv como se menciona a continuación:

$$u = x \qquad \Rightarrow \qquad du = 1\,dx$$

$$dv = e^{6x}dx \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{1}{6}e^{6x}$$

De tal modo que al aplicar la fórmula de integración por partes, se obtiene:

$$\int xe^{6x}dx = u\,v - \int v\,du = x\left(\frac{1}{6}e^{6x}\right) - \int\left(\frac{1}{6}e^{6x}\right)(dx) = \frac{xe^{6x}}{6} - \frac{1}{6}\int e^{6x}dx$$

En la integral que queda por resolver tenemos que completar un coeficiente numérico para poder utilizar la fórmula de integrales inmediatas de las tablas, veamos aisladamente esta integral:

$$\frac{1}{6}\int e^{6x}dx = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)\int e^{6x}(6)\,dx = \frac{1}{36}e^{6x} + C$$

Ahora uniendo esta parte resuelta al resultado total, obtenemos:

$$\int xe^{6x}dx = \frac{xe^{6x}}{6} - \left(\frac{1}{6}\int e^{6x}dx\right) = \frac{xe^{6x}}{6} - \left(\frac{1}{36}e^{6x}\right) + C$$