1. La función $f(x)=\dfrac{4}{x^2-4}$ está bien definida, excepto en:

a) **X=2**
b) **X=-2**
c) **X=-2 y x=2** ←CORRECTA
d) **X=0**

Una función bien definida en un punto "x" es cuando evaluada en la función, es un número real.

¿Qué quiere decir esto? O sea el resultado no queda expresado de ésta forma:

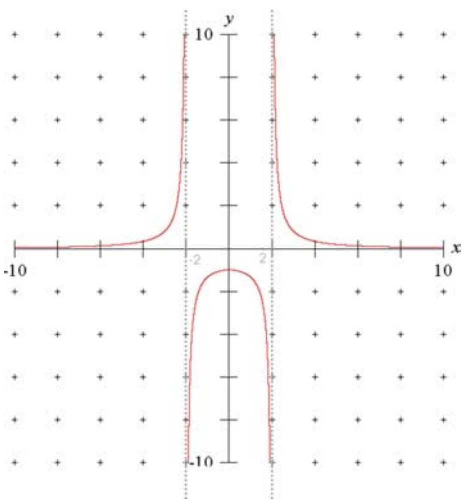
$$\frac{4}{0}=\text{INDEFINIDO o "}\infty\text{"}$$

Veamos que en nuestra función $f(x)=\dfrac{4}{x^2-4}$ la variable INDEPENDIENTE o la variable "x", así se le llama dado que no depende de nada para asignarle un valor, pudiendo nosotros sustituirle cualquier número a nuestra voluntad o antojo, la variable DEPENDIENTE es f(x) o es lo mismo "y" que es el que tomará el resultado al resolver la función una vez introducido una valor a "x". Entonces supongamos que introducimos varios valores a "x" y resolvemos:

X=-3 (yo escogí este número a mi antojo y así los demás que evaluaremos)

$$f(-3)=\frac{4}{x^2-4}=\frac{4}{(-3)^2-4}=\frac{4}{9-4}=\frac{4}{5}=0.8 \quad\Rightarrow\quad f(-3)=y=0.8$$

Con lo anterior formamos un par de coordenadas: $(x,y)=(-3,0.8)$
Esta coordenada la podremos sustituir en un plano cartesiano, y el mismo proceso haremos para cada "x" que escojamos a nuestro antojo.



PERO en nuestra expresión $f(x)=\dfrac{4}{x^2-4}$, habrá valores de "x" donde al resolver la función nos arrojará un resultado parecido a la INDEFINICION que comentamos, o sea:

$$\frac{4}{0}=\text{INDEFINIDO o }\infty$$

¿Puedes identificar esos valores DONDE EN EL DENOMINADOR NOS DE CERO?

Pues precisamente esos valores "x" donde en el DENOMINADOR nos da CERO no se podrá dibujar un punto coordenado en el plano cartesiano "ESTO ES LO QUE NOS PIDEN HALLAR en este ejercicio"

Si nos damos cuenta, en la gráfica, veremos que en esos puntos de x, la línea de la función "líneas rojas" se alargan hasta el infinito tanto hacia arriba o hacia abajo, o sea "x" no tiene un valor definido de "y" porque la línea de la función NO ES CONTINUA.

Tomando SOLO el denominador e IGUALANDOLO A CERO, despejamos a "x":

$$f(x) = \frac{4}{x^2 - 4} \longrightarrow x^2 - 4 = 0$$

Despejamos el valor de x:

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \sqrt{4}$

$x = \pm 2$

$x_1 = -2 \quad x_2 = 2$

Recuerda que al sacar la raíz de un número, su resultado puede ser tanto positivo como negativo, o sea +2, y -2, ya que elevando al cuadrado los 2 valores, se obtiene +4:

$$(-2)^2 = 4 \qquad (2)^2 = 4$$

Esa es la razón del signo ± 2

O sea estos puntos NO están definidos.

2. De a cuerdo a las propiedades de la función exponencial, en la siguiente aseveración $e^a \cdot e^b = 1$, podemos decir que:

a) a= -b ←CORRECTA
b) a= b
c) a y b= 1
d) No podemos hacer deducción alguna.

Cuando tenemos un número, digamos la base a, elevada a una potencia x multiplicando a otro número con la misma base pero elevado a una distinta potencia y, podemos proceder a hacer una suma de los exponentes.

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

Para los exponentes, se cumple la misma propiedad. Además existe otra propiedad para los números de cierta base elevada a una potencia igual a cero, siempre son iguales a 1. Todo número elevado a la 0 potencia es igual a 1. Por ejemplo:

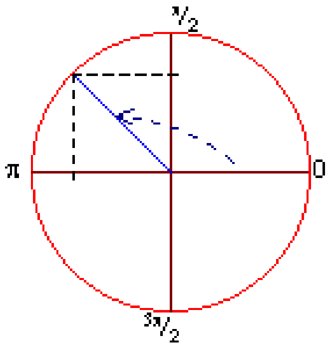
$$a^0 = 1 \qquad e^0 = 1 \qquad 1.23^0 = 1$$

Tomemos el lado izquierdo de la igualdad $e^a e^b = 1$. Este resultado lo podemos simplificar a $e^a e^b = e^{a+b}$. Para que este resultado sea igual a 1, solo existe la posibilidad de que el exponente esté igualado a cero, de acuerdo a la propiedad que fue explicada anteriormente. Por tanto $a+b=0$ lo cual implica que $a=-b$. De esta forma, la respuesta correcta es el inciso a).

3. Selecciona el cuadrante donde solamente la función trigonométrica tangente y cotangente son positivas.

a) I ←CORRECTA
b) II
c) III ←CORRECTA
d) IV

En este caso el plano cartesiano queda dividida en cuatro partes iguales de 90º ($\frac{\pi}{2}$) cada una,



que va desde 0º hasta 360º (2π), a las que se denomina cuadrantes:

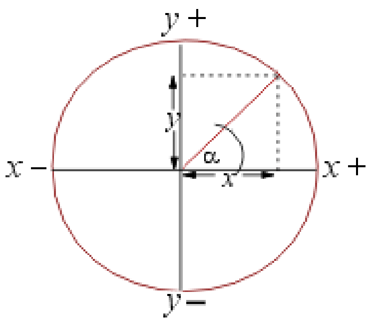
1er cuadrante: 0º a 90º

2do cuadrante: 90º a 180º

3er cuadrante: 180º a 270º

4to cuadrante: 270 a 360º

En el *primer cuadrante*, vemos que: el cateto adyacente se ubica sobre el eje *x*, así que lo denominaremos "*x*"; al cateto opuesto, que se ubica sobre el eje *y*, lo llamaremos "*y*".

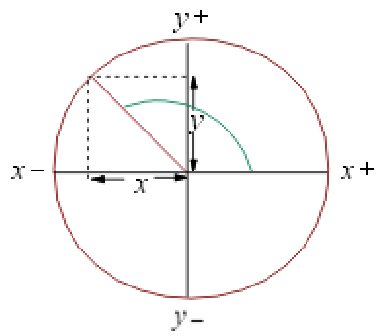


$$\tan\theta = \frac{CO}{CA} = \frac{y}{x} = \frac{+}{+} = +$$

$$\cot\theta = \frac{CA}{CO} = \frac{x}{y} = \frac{+}{+} = +$$

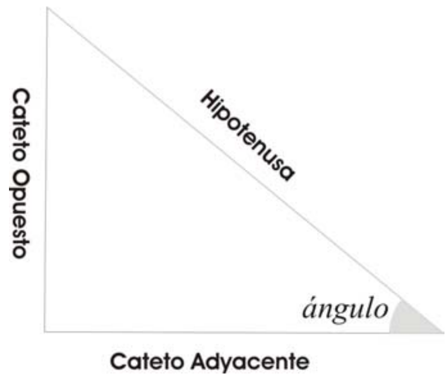
Ya que "*x*", "*y*", son positivas, entonces, Todas las funciones trigonométricas en el primer cuadrante son positivas, en especial tangente y cotangente.

En el *segundo cuadrante*, el cateto adyacente cae sobre el eje negativo de las *x*, mientras que el cateto opuesto sigue sobre el ele positivo de las *y*. Por lo tanto: el coseno, la tangente y sus inversas (secante y cotangente) tienen resultados negativos.

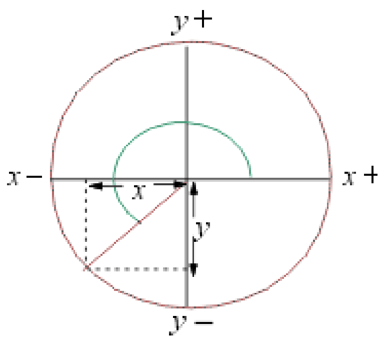


$$\tan\theta = \frac{CO}{CA} = \frac{y}{x} = \frac{+}{-} = -$$

$$\cot\theta = \frac{CA}{CO} = \frac{x}{y} = \frac{-}{+} = -$$



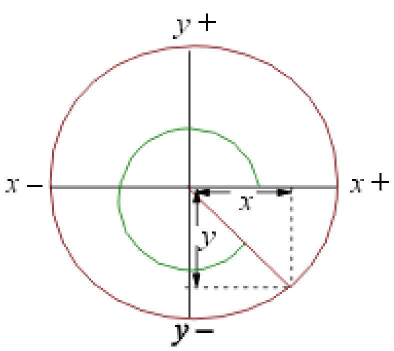
En el *tercer cuadrante*, tanto el cateto adyacente como el cateto opuesto tienen sus signos negativos, ya que caen sobre la parte negativa de los ejes. En este caso la tangente (y su inversa, la cotangente) resultan positivas (- : - = +)



$$\tan\theta = \frac{CO}{CA} = \frac{y}{x} = \frac{-}{-} = +$$

$$\cot\theta = \frac{CA}{CO} = \frac{x}{y} = \frac{-}{-} = +$$

En el *cuarto cuadrante*, el cateto adyacente vuelve a estar sobre el eje positivo de las *x*, mientras que el cateto opuesto sigue sobre el eje negativo de las *y*.



$$\tan\theta = \frac{CO}{CA} = \frac{y}{x} = \frac{-}{+} = -$$

$$\cot\theta = \frac{CA}{CO} = \frac{x}{y} = \frac{+}{-} = -$$

Veamos los signos de las funciones trigonométricas según el cuadrante en tres cuadros sinópticos

cuadrantes		sen - cosec		cos - sec		tg - cotg	
II	I	+	+	−	+	−	+
III	IV	−	−	−	+	+	−

Por lo tanto en esta pregunta tanto en el cuadrante I como en el III, tangente y cotangente son positivas. Por lo tanto la pregunta tiene 2 respuestas a la vez.

4. La simplificación de la expresión $\dfrac{7x^2y^{-4}z^{-3}}{8x^{-5}y^{-6}z^2}$ es

a) $\dfrac{7x^7y^2}{8z^5}$ ←CORRECTA

b) $\dfrac{7x^{-3}y^{-10}}{8z^1}$

c) $\dfrac{7x^{-2/5}y^{-2/3}}{8z^1}$

d) 0

Recordemos que podemos expresar el inverso de un número a cualquiera como $\dfrac{1}{a}$ el cual también se puede expresar como a^{-1}. Por ello podemos escribir la expresión $\dfrac{7x^2y^{-4}z^{-3}}{8x^{-5}y^{-6}z^2}$ a lo siguiente:

$$\frac{7x^2y^{-4}z^{-3}}{8x^{-5}y^{-6}z^2} = \frac{7x^2\frac{1}{y^4}\frac{1}{z^3}}{8\frac{1}{x^5}\frac{1}{y^6}z^2} = \frac{\frac{7x^2}{y^4z^3}}{\frac{8z^2}{x^5y^6}}$$

Aplicando la regla del sándwich

$$\frac{\frac{7x^2}{y^4z^3}}{\frac{8z^2}{x^5y^6}} = \frac{7x^2x^5y^6}{8y^4z^2z^3} = \frac{7x^7y^6}{8y^4z^5} = \frac{7x^7y^2}{8z^5}$$

Por tanto, la respuesta correcta es el inciso a).

5. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x)=x^2-4x+4$?

a) Los números Reales excepto el valor de x=2
b) Los números Reales ←CORRECTA
c) Los números Reales excepto el valor de x= -2
d) X=2

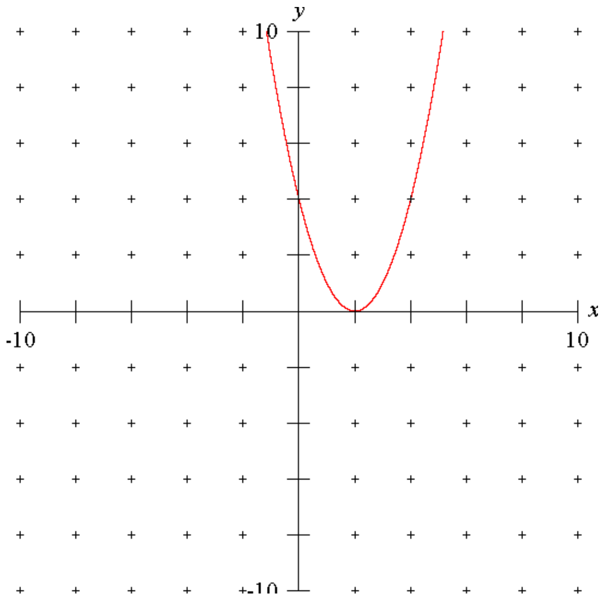
Recordemos que en la pregunta 1 habíamos hablado sobre las funciones indefinidas que suceden cuando el denominador se hace cero.

En éste problema no hay denominador y por tanto no hay variable "x" que se haga cero en ese lugar porque no es fracción.

Entonces podemos decir que este polinomio está definido en todos los números reales. El DOMINIO es precisamente UN INTERVALO de las "x" donde la función está definida.

Puedes hacer la prueba sustituyendo cualquier número deseado en CADA "x" de la función y siempre obtendrás algún número real:

$$f(x)=x^2-4x+4$$



Los otros incisos del problema dicen que "excepto cuando x=2 o x=-2". Estas proposiciones son incorrectas porque la función sí está definida en esos puntos, ya que existe un valor numérico de "y" para esas "x":

$$f(2)=2^2-4(2)+4=4-8+4=0$$

$$f(-2)=(-2)^2-4(-2)+4=4+8+4=16$$

Para responder la pregunta, el DOMINIO en "x" son TODOS los números reales, desde $-\infty$ hasta $+\infty$ o sea en todos los $\mathbb{R}$ - "Reales". Recuerda que el DOMINIO es el intervalo de las "x" que son posibles de evaluar en la función y pueda dibujarse en la gráfica.

6. La función $f(x)=\frac{3-x}{5-x}$ está bien definida, excepto en:

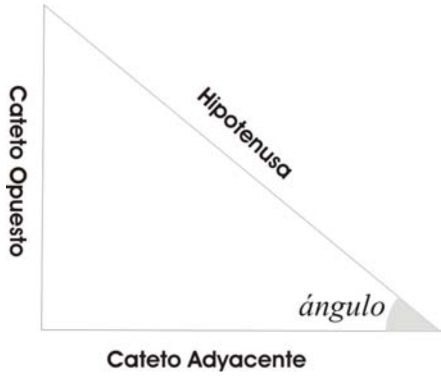
a) $x=5$ ←CORRECTA
b) Los números Reales
c) Los números Reales excepto el valor de $x=5$
d) Los números Reales excepto el valor de $x=-5$

Sea f(x) una función racional $f(x)=\frac{n(x)}{d(x)}$ que está compuesta de dos polinomios, $n(x)$ es el numerador y $d(x)$ es el denominador. Se dice que una función racional está indefinida cuando el denominador es cero, o sea $d(x)=0$.Si el denominador es diferente de cero la función está definida en el punto x. En este caso $d(x)=5-x$, por lo que para hallar el punto en el que no está definida la función, igualemos a cero el denominador: $5-x=0 \Rightarrow x=5$.
Entonces la respuesta correcta es el inciso a).

7. En el segundo cuadrante las funciones trigonométricas que son positivas son:

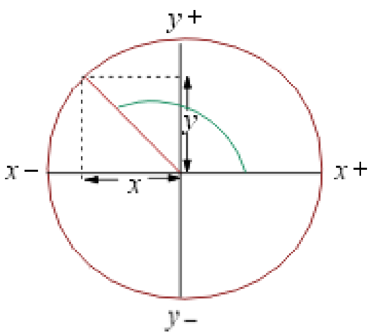
a) Tangente y cotangente
b) Coseno y secante
c) Seno y cosecante ←CORRECTA
d) Todas son positivas

En el *segundo cuadrante*, el cateto adyacente cae sobre el eje negativo de las *x*, mientras que el cateto opuesto sigue sobre el eje positivo de las *y*. Por lo tanto: el SENO, y COSECANTE tienen resultados positivos. "r" es una distancia que nos sirve como hipotenusa, y esta distancia de "r" siempre es positiva. Se deduce de Pitágoras.



$$C^2 = A^2 + B^2$$
$$r^2 = CA^2 + CO^2$$
$$r = \sqrt{CA^2 + CO^2} = (+)$$

← Calculamos r porque hay funciones trigonométricas donde en su relación incluye a la hipotenusa como es el caso del seno, coseno, secante y cosecante, pero de ellos solo seno y coseno son positivos en el segundo cuadrante:



$$\sin\theta = \frac{CO}{HIP} = \frac{y}{r} = \frac{+}{+} = +$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{CO}{HIP}} = \frac{HIP}{CO}\frac{r}{y} = \frac{+}{+} = +$$

cuadrantes		sen - cosec		cos - sec		tg - cotg	
II	I	+	+	−	+	−	+
III	IV	−	−	−	+	+	−

8. Al desarrollar (x-2) (x+8), la respuesta correcta es:

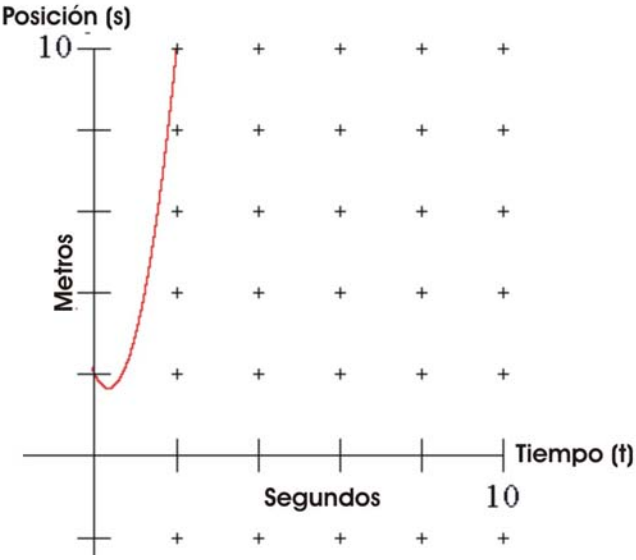
a) $X^2-6x-16$
b) $X^2+6x+16$
c) $X^2+6x-16$ ←CORRECTA
d) X^2+6x^2-16

Lo único que hay que aplicar es la ley distributiva de la multiplicación donde se multiplican todos los términos de un paréntesis por todos los elementos del otro paréntesis y luego sumar términos semejantes, con la misma x por ejemplo con potencia 1.

$$(x-2)(x+8)=x(x+8)-2(x+8)=x^2+8x-2x-16=x^2+6x-16$$

9. La ecuación $s = 3t^2 - 2t + 2$ donde s está en metros y t en segundos, representa la posición de una partícula en cualquier instante. Hallar el tiempo en que la velocidad de la misma es cero.

a) Un segundo
b) 3 segundos
c) 0 segundos
d) 1/3 segundos **←CORRECTA**



En ésta ecuación veamos que al momento de resolverla para un tiempo "t", el resultado dará una posición en la que se encontrará la partícula para ese mismo instante.

Si nosotros graficamos en un plano cartesiano cada valor t a partir de que empezó la partícula a moverse en t=0 segundos veremos que se forma casi una mitad de parábola abierta hacia arriba.

Ahora lo que nosotros necesitamos saber, es cuándo la velocidad se hará cero.

Para ello recordemos la fórmula de física que es

$$\text{velocidad}=\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

Pero en cálculo diferencial podemos llegar a la misma fórmula aplicando una derivada.

Si $s = 3t^2 - 2t + 2$ permite hallar la posición exacta de una partícula, derivando la ecuación con respecto al tiempo, lo que hacemos es obtener lo siguiente:

$$s = 3t^2 - 2t + 2 \quad \text{Posición de una partícula dada una t}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\text{posición}}{\text{tiempo}} \Rightarrow \text{velocidad}$$

$$\frac{ds}{dt} = 6t - 2 \qquad \text{Velocidad de una partícula dada una t}$$

Por instrucción del ejercicio, es necesario calcular el momento en el instante que la velocidad es igual a cero. Lo que haremos es igualar la buena ecuación cero, indicándole a la función que necesitamos obtener el tiempo (variable incógnita) cuando la velocidad sea $0\frac{\text{mts}}{\text{seg}}$

$v = 6t - 2 \qquad \leftarrow$ función velocidad

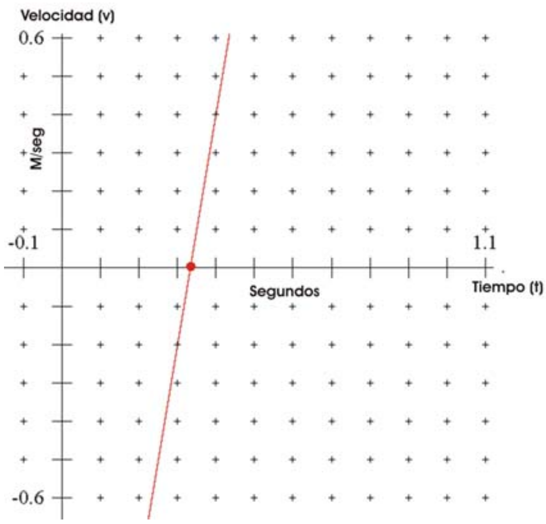
$v = 6t - 2 = 0$

$6t = 2 \qquad \leftarrow$ despejando la "t" incógnita cuando la velocidad es cero

$t = \frac{1}{3}$ segundos

Ahora grafiquemos la función de velocidad en cuestión del tiempo y cuando $t = \frac{1}{3}$ segundos **su velocidad corta al eje x, indicando que tiene v=0.**

Por lo tanto el momento en el cual la velocidad del coche es cero se da en $t = \frac{1}{3}$ segundos



10. Derivar $y=\frac{1}{(2-3x)^4}$

a) $y=\frac{4}{(2-3x)^5}$

b) $y=-\frac{4}{(2-3x)^5}$

c) $y=\frac{12}{(2-3x)^5}$ ←CORRECTA

d) $y=-\frac{12}{(2-3x)^8}$

Como vimos anteriormente, podemos expresar el inverso de un número a como $\frac{1}{a}=a^{-1}$, por tanto podemos escribir $y=\frac{1}{(2-3x)^4}=(2-3x)^{-4}$. El cual es un polinomio elevado a una potencia.

Recordemos la regla de la cadena, la cual es una regla de derivación que se aplica a una función $y(h)$, compuesta de otra función $h(x)$. Es decir, $y(h)=y(h(x))$. La función y depende de la variable h, pero a su vez, esta variable depende de otra variable (x).

Entonces la derivada de y es $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(y\left(h(x)\right)\right)=\frac{dy}{dh}\frac{dh}{dx}$.

Primero tenemos que derivar con respecto a h, y luego derivar h con respecto a x, para posteriormente multiplicar los resultados. Podemos identificar para este caso, en particular la función $y=h^{-4}$ y la función $h=2-3x$.

Derivemos y con respecto a h, $\frac{dy}{dh}=\frac{d}{dh}\left(h^{-4}\right)=-4h^{-4-1}=-4h^{-5}$

Y ahora la derivada de h con respecto a x, $\frac{dh}{dx}=\frac{d}{dx}\left(2-3x\right)=0-3=-3$

Multiplicamos ambos resultados $\frac{dy}{dx}=\left(-4h^{-5}\right)\left(-3\right)=12h^{-5}$ **y sustituimos ahora** $h=2-3x$

$\frac{dy}{dx}=12(2-3x)^{-5}=\frac{12}{(2-3x)^5}$.

La respuesta correcta es el inciso c).

11. Un automovilista realiza un salto mortal desde una pista de 20m de altura y sale disparado horizontalmente con una velocidad de 55 m/s. ¿Cuál es la distancia horizontal que recorre?

a) 222m
b) 79m
c) 111m ←CORRECTA
d) 158m

Para este problema recurrimos a las fórmulas de física del tema cinemática:

$$s = s_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$$

$$v = \frac{s}{t}$$

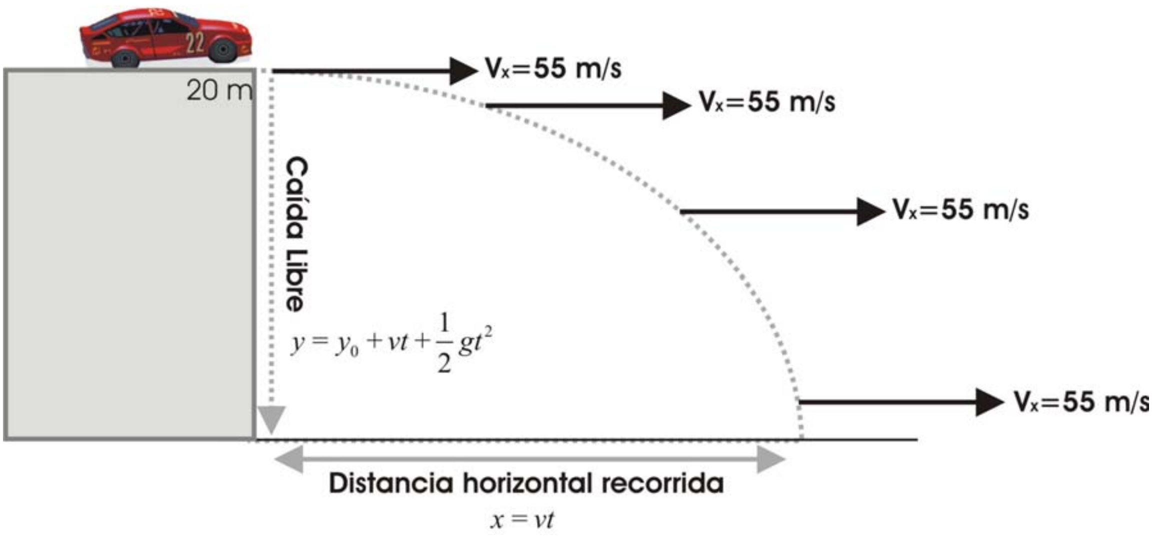
A este problema se le puede considerar como tipo parabólico ya que su trayectoria del coche al momento de salir disparado horizontalmente de la pista a 20 metros de altura, forma un arco o parábola, es lógico que por la acción de la gravedad tenga que sufrir A LA VEZ una caída libre en el eje y, mientras que en el eje x experimenta un movimiento rectilíneo UNIFORME, por ello dividimos la resolución del problema en 2 etapas, y es necesario empezar con la caída libre ya que ésta nos determina en cuanto tiempo llegará el coche al piso, una vez conocido ese tiempo lo usamos para evaluar cuánto recorrerá de distancia horizontalmente.

NOTA: el tiempo que tarda en caer el coche de esa altura, es independiente de la velocidad al que se esté moviendo hacia la derecha o izquierda del eje x, así que el coche experimentaría el mismo tiempo en caer de los 20 metros si lo hubieran soltando desde esa altura, sólo como caída libre.

1era. Etapa de solución (CAIDA LIBRE - EJE Y)
Utilizando la 1era fórmula descrita al principio, pero con otras variables "s de distancia por y por considerarse altura o movimiento en eje y, y la a de aceleración por g de gravedad":

$$y = y_0 + vt + \frac{1}{2}gt^2$$

En donde:
y es la posición del coche en el eje y para un tiempo específico
y_0 es la altura inicial.
v_0 es la velocidad inicial con la que inicia el movimiento.
t es el tiempo.
g es la aceleración de la gravedad = 9.81 m/s.



Considerando que en esta etapa, la v_{0y}=0 ya que si nos aislamos únicamente a este eje podremos ver que nunca salió con una velocidad hacia abajo (como si se soltara desde esa altura), solo hacia la derecha tiene velocidad constante durante la caída.

$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$ despejar a t, considerando v_{0y}=0 y v=0

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

$$t^2 = \frac{2y}{g}$$

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2(20m)}{9.81\frac{m}{s^2}}} = 2.0192\ s \qquad \Rightarrow \quad t_{total} = 2.0192\ s$$

2da. Etapa

Con éste tiempo de caída la utilizaremos para conocer hasta donde le alcanza llegar con ese tiempo:

$$v = \frac{s}{t}$$

$$v = \frac{x}{t_{total}}$$

$$x = v\,t_{total} = \left(55\frac{m}{s}\right)(2.0192\ s) = 111.06m$$

12. Evaluar $\lim\limits_{t \to 6} \dfrac{t-6}{t^3-6t^2}$ **.**

a) 1/6
b) 1/36 ←CORRECTA
c) 0
d) No existe

Tratemos de sustituir directamente el resultado de $t=6$ en la función $\dfrac{t-6}{t^3-6t^2}$. Si lo hacemos, obtendremos como resultado $\dfrac{6-6}{6^3-6\cdot 6^2}=\dfrac{0}{0}$, la cual es una indeterminación porque el denominador es cero, y no existe ningún número en la recta real que tenga denominador cero. Cuando tenemos una indeterminación, a veces habría que proceder haciendo un despeje algebraico, como una factorización.

Factoricemos el denominador, ya que el numerador está reducido lo más posible. Saquemos t^2 como factor:

$$\frac{t-6}{t^3-6t^2}=\frac{t-6}{t^2(t-6)}$$

Con esto, podemos cancelar $t-6$ en el numerador y el denominador y nos queda

$$\frac{t-6}{t^2(t-6)}=\frac{1}{t^2}$$

Ahora si, podemos sustituir el valor de $t=6$ y obtendremos un valor diferente de cero, por lo que la indeterminación fue eliminada.

$$\lim_{t\to 6}\frac{t-6}{t^3-6t^2}=\lim_{t\to 6}\frac{1}{t^2}=\lim_{t\to 6}\frac{1}{6^2}=\lim_{t\to 6}\frac{1}{36}=\frac{1}{36}$$

La respuesta es el inciso b).

13. Un corredor la vuelta a una pista de atletismo de 400 metros en 3 min., 43 .13 seg. ¿Qué rapidez media tuvo durante la carrera?

a) 133.33 m/s
e) 1.79 m/s ←CORRECTA
b) 17.48 m/s
c) 9.274 m/s

Tomemos en cuenta que el corredor posiblemente haya disminuido o aumentado su velocidad en el trayecto, pero ante esa irregularidad, sabemos que le tomo 3 min y 43.13 segundos en completar 400 metros, eso quiere decir que en promedio de velocidad o rapidez media es:

Primero convirtamos el tiempo dado en segundos: $3\min\left(\frac{60s}{1\min}\right)=180s$

$$180s+43.13s=223.13s$$

$$v=\frac{s}{t}=\frac{400\,\mathrm{m}}{223.13s}=1.79\frac{m}{s}$$

14. ¿Cuánto tarda un carro (en hrs) en viajar de Monterrey a Laredo (250km) si su velocidad promedio es de 110 km/hr?

a) 2.27 ←CORRECTA
b) 0.44
c) 27500
d) 275

El tiempo de viaje se puede determinar utilizando la fórmula para velocidad constante:

$$v = \frac{d}{t}$$

Donde
v = velocidad promedio,
d = distancia
t = tiempo.

Ahora despejando el tiempo de la fórmula:

$$t = \frac{d}{v}$$

Y sustituyendo los valores que se dan en el problema

$$t = \frac{250km}{110\frac{km}{h}} = 2.27\frac{\frac{km}{1}}{\frac{km}{h}} = 2.27h.$$

Nótese que en la sustitución anterior se realizó el análisis de unidades, por lo que se eliminaron los km y el resultado quedó en unidades de tiempo únicamente.

El inciso a corresponde a la respuesta correcta.

15. La función de posición de un cuerpo en movimiento está dada por $s(t) = 12 - 6t - t^3$, donde s se mide en pies y t en segundos. ¿Cuál es la aceleración en t=3?

a) -18ft/s^2 ←CORRECTA
b) 18ft/s^2
c) -9ft/s^2
d) 9ft/s^2

En el ejercicio numero 9 habíamos comentado que derivando la variable "s" con respecto al tiempo, obtenemos la velocidad; ahora si derivamos la velocidad con respecto al tiempo obtenemos la aceleración:

$$\text{Formula velocidad (MRU)} \quad v = \frac{s}{t}$$

$$\text{Formula aceleración (MRUV)} \quad a = \frac{v}{t}$$

MRU → Movimiento Rectilíneo Uniforme
MRUV→Movimiento rectilíneo Uniformemente Variado (o uniformemente acelerado)

$$s(t) = 12 - 6t - t^3 \quad \rightarrow \text{ecuación de posición}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -6 - 3t^2 \quad \rightarrow \text{ecuación de velocidad}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -6t \quad \rightarrow \text{ecuación de aceleración}$$

Dado que nos piden hallar la aceleración instantánea justo a los 3 segundos entonces solo hace falta sustituir en la ecuación obtenida de aceleración, el valor de t=3

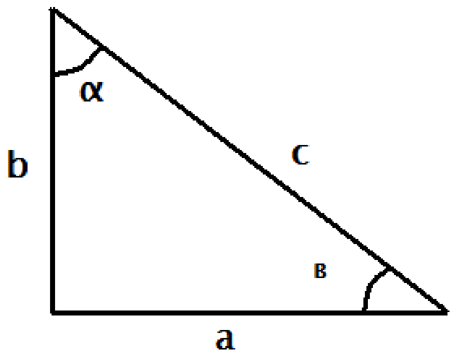
$$a = -6t$$
$$a = -6(3) = -18$$

Las unidades de la aceleración son: $a = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{\text{ft}}{\text{s}}}{\text{s}} = \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}$

$$a = -18\frac{\text{ft}}{\text{s}^2}$$

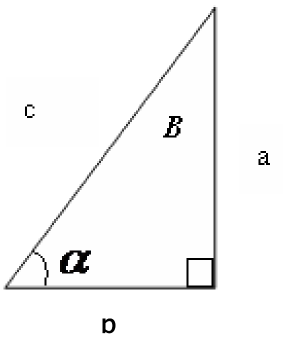
16. Determina el valor del lado b en el triangulo con la información dada: $\alpha = 23°$, $a = 54$

a) 138
b) 67
c) 16129
d) 127 ←CORRECTA



Este es un problema de trigonometría básica. Su solución consiste en encontrar una relación que involucre los datos conocidos con el dato que desconoces.

El problema se aprecia mejor girando el triángulo:



Para este caso dado que es un triángulo rectángulo, la función que involucra a dichos datos es la función tangente del ángulo α

$$\tan\alpha = \frac{CO}{CA} = \frac{a}{b}$$

(CO es cateto opuesto y CA es cateto adyacente)
De esa relación se puede despejar "b", que es el valor que deseamos conocer,

$$b = \frac{a}{\tan\alpha}$$

Ahora sustituyendo los valores de a y α:

$$b = \frac{54}{\tan(23^{o})} = \frac{54}{0.42447} = 127.21 \approx 127$$

La respuesta más acertada es la del inciso d).

Nota: para mejorar la velocidad de solución de problemas similares, te recomendamos estudiar muy bien las funciones trigonométricas y sus relaciones.

17. Simplifica la expresión $\left(\dfrac{4x^2y}{2xy^3}\right)^{-2}$

a) $\dfrac{4y^{-7}}{4x^2}$

b) $\left[\dfrac{2y^4}{x^2}\right]$

c) $\dfrac{y^4}{4x^2}$ ←CORRECTA

d) $\dfrac{-4x^{-5}}{y^{-4}}$

Utilizando las leyes de los exponentes, el número que expresa la potencia (-2) indica que todo aquello que esté elevado a esa potencia, cambia del numerador al denominador pero con el exponente ahora positivo, luego resolvemos el cuadrado de todo lo que se encuentra dentro del paréntesis, ya después es sólo cancelar variables que se encuentren en el numerador como en el denominador.

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$$\left(\frac{4x^2y}{2xy^3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{4x^2y}{2xy^3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{16x^4y^2}{4x^2y^6}} = \frac{4x^2y^6}{16x^4y^2} = \frac{(x)(x)(y)(y)(y)(y)(y)(y)}{4(x)(x)(x)(x)(y)(y)} = \frac{y^4}{4x^2}$$

Entonces: $\left(\dfrac{4x^2y}{2xy^3}\right)^{-2} = \dfrac{y^4}{4x^2}$

Para más información de las leyes de exponentes, visita:
http://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/exponentes-negativos.html

18. Encontrar la derivada de la función dada por:

$$y= \frac{3}{4}x^{4/3}-\frac{1}{5}x^{1/4}+x^{-5/6}$$

a) $y'=x^{1/3}-\frac{1}{20}x^{-3/4}-\frac{5}{6}x^{-11/6}$ ←CORRECTA

b) $y'=x^{1/3}-\frac{1}{20}x^{-5/4}-\frac{5}{6}x^{-1/6}$

c) $y'=\frac{3}{4}x^{1/3}-\frac{1}{5}x^{1/4}-x^{-11/6}$

d) $y'=x^{1/3}-\frac{1}{20}x^{-3/4}+\frac{5}{6}x^{-11/6}$

La derivada de la función

$$y=\frac{3}{4}x^{4/3}-x^{1/4}+x^{-5/6}$$

se obtiene según las reglas de derivación, de la siguiente manera:

$$y'=\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)x^{(4/3-1)}-\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)x^{(1/4-1)}+\left(-\frac{5}{6}\right)x^{(-5/6-1)}=x^{(4/3-3/3)}-\frac{1}{20}x^{(1/4-4/4)}-\frac{5}{6}x^{(-5/6-6/6)}$$

Así, la derivada es:

$$y'=x^{1/3}-\frac{1}{20}x^{-3/4}-\frac{5}{6}x^{-11/6}$$

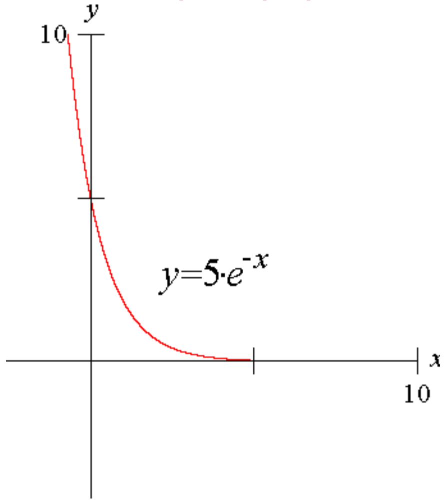
Y coincide con la respuesta del inciso a.

Notas: es muy recomendable que conforme vayas resolviendo cada término de la derivada, integral o cualquier tipo de ejercicio que involucre varios términos, vayas comparando con las respuestas, en muchas ocasiones no es necesario realizar toda la operación, pues el resultado es evidente por eliminación al calcular algunos términos. Puedes agilizar el proceso haciendo una revisión rápida de las respuestas y comparando con algún término que ya hayas obtenido. Esto te ayudará a ganar tiempo y poder dedicarle un poco más de tiempo a problemas de mayor dificultad.

*puedes encontrar las reglas de derivación en este enlace:

http://docentes.uacj.mx/sterraza/matematicas_en_movimiento/derivada/der_reg.html

19. Identifica la opción que puede corresponder a la gráfica dada:



Para estar seguro de la gráfica, evaluemos la función sustituyendo valores diferentes de x, pero en especial cuando x=0 según la gráfica muestra que la línea debe cruzar al eje y en y=5.

El único que cumple esta condición es:

$$y = 5e^{-x}$$
$$f(x) = f(0) = 5e^{-0} = 5(1) = 5$$

PROPIEDAD DE "e" → $e^{0} = 1$

a) **$5e^{-x}$** ←CORRECTA
b) **$-5e^{x}$**
c) **$5-e^{x}$**
d) **$5e^{x}$**

20. Una persona deja caer una piedra desde la azotea de un edificio alto; la piedra tarda 3.4 s en llegar al suelo. ¿Qué altura tiene el edificio?

a) 16.66 m
b) 163.3 m
c) 56.7 m ←CORRECTA
d) 2.88 m

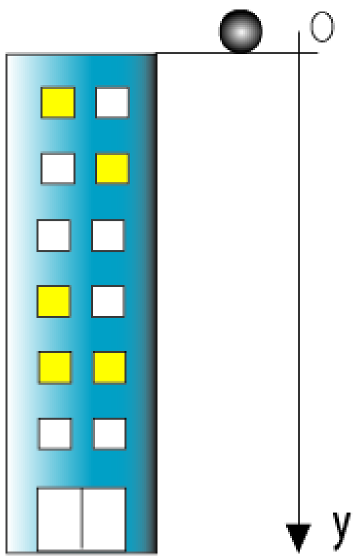
Éste es un problema de caída libre, para este tipo de problemas se tiene la siguiente fórmula:

$$y = h_0 + v_o t - \frac{1}{2} g t^2$$

En donde:

- y es la posición de la piedra.
- h_0 es la altura inicial.
- v_0 es la velocidad inicial con la que inicia el movimiento.
- t es el tiempo.
- g es la aceleración de la gravedad = 9.81 m/s.

El problema se resuelve fácilmente si consideramos que la piedra se suelta, de manera que al momento de iniciar su movimiento no lleva velocidad alguna, por lo tanto $v_0 = 0$; si consideramos el diagrama siguiente, se puede tomar en cuenta que la posición inicial de la partícula es cero, por lo tanto $h_0 = 0$.



De esta manera la ecuación queda de la siguiente manera:

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

Considerando el movimiento positivo hacia abajo.

Ahora sustituyendo los valores de la gravedad y del tiempo, luego evaluando, se obtiene:

$$y = \frac{1}{2}(9.81 m/s^2)(3.4 s)^2 = 56.701 m$$

Valor que coincide con la respuesta del inciso c.

Notas: para la resolución más rápida de ejercicios de este tipo es muy importante ubicar de manera apropiada un sistema de coordenadas que permita hacer cero la mayor cantidad de términos de una fórmula. En este caso fue muy conveniente considerar el movimiento positivo en dirección hacia abajo, así como definir la posición inicial en el origen. A la hora de un examen bajo estos conocimientos, se puede recordar fácilmente la fórmula ya reducida, pero es importante considerar los términos que no se utilizaron en este ejercicio cuando se tienen condiciones iniciales diferentes. SE RECALCA MUCHO EL CUIDAR LOS SIGNOS QUE DETERMINAN LA DIRECCIÓN DEL MOVIMIENTO.

21. Calcule el límite indicado: $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x-5}$

a) **0**
b) **$+\infty$**
c) **-2/5**
d) **3** **←CORRECTA**

Para hallar los límites de una función cuando "x TIENDE al infinito" tenemos que recurrir a la siguiente técnica (aplicable a cualquier función polinómica).

Dividir a todos y cada uno de los elementos de la fracción entre la variable que tenga la mayor potencia en la función original o sea x a la potencia 1, o simplemente x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x}+\frac{2}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{5}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{1-\frac{5}{x}}=\frac{3+\frac{2}{\infty}}{1-\frac{5}{\infty}}=\frac{3+0}{1-0}=\frac{3}{1}=3$$

Note que en el 3er paso tenemos términos como: $\frac{2}{x}$ y $\frac{5}{x}$ donde en el denominador tenemos a la variable "x" que es la que va a tender a infinito (o sea vamos dándole valores muy grandes), pero recordemos que en la PREGUNTA 1 habíamos comentado que $\frac{2}{0}=\text{INDEFINIDO o "}\infty\text{"}$ o sea que cualquier número dividido entre cero es indefinido por tratarse de cualquier número del infinito:

$$\frac{2}{0}=\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\infty}=0$$

ya que si calculamos:

$$\frac{2}{1000}=0.002$$

$$\frac{2}{1000000}=0.000002$$

$$\frac{2}{1000000000}=0.000000002\approx 0$$

Ya que dividir entre un número muy grande como lo es infinito, tu resultado es muy pequeño CASI CERO, por ello la explicación del porque del siguiente paso.

Ya luego se calcula la fracción resultante llegando al "3"

22. Si la velocidad máxima alcanzada en un automóvil a reacción fue de 763 millas/hora, ¿Cuál es la velocidad en metros/seg?

a) 341.09 ←CORRECTA
b) 204.65
c) 373
d) 12.71

Este ejercicio pone a prueba tus conocimientos de las magnitudes físicas y sistemas de unidades, en este caso las de longitud y tiempo. El cambio es del sistema de unidades ingles, al sistema internacional de unidades.

La mejor manera de abordar la resolución de este ejercicio es hacer directamente la conversión y cotejar con las respuestas para encontrar la correcta:

Para realizar la transformación utilizamos los factores de conversión. Llamamos factor de conversión a la relación de equivalencia entre dos unidades de la misma magnitud, es decir, un cociente que nos indica los valores numéricos de equivalencia entre ambas unidades. Por ejemplo, en nuestro caso, se tienen 1609.344 metros por cada milla, lo cual se expresa de la siguiente manera: $\frac{1609.344m}{milla}$

Y una hora es equivalente a 3600 segundos. $\frac{hora}{3600s}$

Con lo anterior, se realiza la conversión de la siguiente forma:

$$\frac{763millas}{hora}=\frac{763\cancel{millas}}{\cancel{hora}}\times\frac{1609.344m}{\cancel{milla}}\times\frac{\cancel{hora}}{3600s}=341.09\frac{m}{s}$$

Cuando hacemos una conversión de unidades para cualquier cantidad física, se puede multiplicar por un factor de conversión. Si la unidad que queremos eliminar se encuentra en el numerador, colocamos un valor arbitrario de esa unidad en el denominador y escribimos la equivalencia en el numerador para ese mismo valor arbitrario. En el ejemplo anterior se realiza este procedimiento en dos ocasiones, un factor para convertir de millas a metros y otro factor para convertir de horas a segundos.

Con lo cual podemos notar que la respuesta correcta es el inciso a.

Nota: para fines prácticos en un examen de este tipo es posible utilizar una aproximación del factor de conversión, por ejemplo, en vez de considerar que una milla es equivalente a 1609.344 m (valor difícil de memorizar), se puede considerar que son aproximadamente 1600 m, con lo cual se tendría que la equivalencia sería de 339 m/s; este valor aproximado es suficiente para determinar la respuesta ubicando la mejor aproximación a este valor. Es muy recomendable que revises un libro de física y estudies las tablas de conversión de unidades.
Te recomendamos las páginas siguientes, en ella encontraras las tablas de unidades.

http://www.cem.es/cem/es_ES/utilidades/convunidades.jsp?op=convunidades
http://www.amadeus.net/home/converters/es/area_es.htm

Nota 2: ten cuidado al convertir millas a metros, existen dos tipos de millas: las millas terrestres y las millas náuticas, que no tienen el mismo factor de conversión, así cuando te especifiquen que son millas acuáticas o náuticas utiliza el siguiente valor: Milla náutica = 1,851.850 metros.

23. Encuentra la derivada de la función: $f(x) = 5^{-x+1}$

a) **-1n5 · $5^{-x/1}$** ←CORRECTA
b) **(-x+1) · 5^{-x}**
c) **1n5 · $5^{-x/1}$**
d) **-1n5 · 5^{-x}**

Antes de derivar hay que reconocer con ¿RESPECTO A QUÉ SE DERIVARÁ? En nuestro caso es una derivada de la función con respecto a "x", entonces ubiquemos a la "x" en la función, resulta que está como un exponente de un número. Por lo tanto la fórmula de derivación aplicable en éste caso es:

$$\frac{d}{dx}\left(a^u\right) = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

Donde $u = -x+1$, $\dfrac{du}{dx} = -1$

Ahora derivamos utilizando la fórmula mencionada

$$f(x) = 5^{-x+1}$$

$$\frac{d\left(5^{-x+1}\right)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(5^{-x+1}\right) = \left(5^{-x+1}\right)\ln 5\left(-1\right) = -5^{-x+1}\ln 5 = -\ln 5 \cdot 5^{-x+1}$$

24. Si f(x)= 5-8x ¿Cuál de las siguientes opciones es falsa?

a) f(t)=5-8t
b) f(x+2)=11-8x ←OPCION A ELEGIR
c) f(5/8)= 0
d) f(1)= -3

Para resolver este ejercicio es necesario observar que la función dada en las posibles respuestas sea equivalente a la planteada en el ejercicio.

Probemos con el inciso a.

$$f(t)=5-8t$$

De esta función se puede observar que la única diferencia reside en la sustitución de la variable x por la variable t, de manera que es completamente equivalente.

Probemos la segunda respuesta, si sustituimos en la ecuación el valor de x+2 sucede lo siguiente:

$$f(x+2)=5-8(x+2)=5-8X-16=-11-8X$$

Lo cual difiere del valor que se da en el inciso b. por lo tanto ESTA ES LA RESPUESTA QUE ES FALSA.

Evaluando el inciso c.

$$f\left(\frac{5}{8}\right)=5-8\left(\frac{5}{8}\right)=5-5=0$$

De manera que la sentencia se hace verdadera.

Evaluando el inciso d.

$$f(1)=5-8(1)=5-8=-3$$

Y podemos observar que la respuesta también es correcta.

Nota: Para efectos prácticos y debido a que el tiempo de resolución del examen cuenta, no es necesario evaluar todas las respuestas posibles, pues al tener cierta certeza de haber encontrado la que la solución correcta, se puede pasar al siguiente problema.